

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Смоленский государственный университет»

Физико-математический факультет

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ
В МАГИСТРАТУРУ**

по направлению 010200 – Математика и компьютерные науки
магистерская программа

Комплексный анализ и приложения
степень (квалификация) «магистр»

Смоленск - 2012

Структура вступительных испытаний

1. Цель и задачи вступительного испытания

Вступительное испытание в магистратуру направлено на выявление степени готовности абитуриентов к освоению магистерской программы «Комплексный анализ и приложения». В ходе вступительного испытания оцениваются обобщенные знания и умения по теоретическим и методическим основам математики; выявляется степень сформированности компетенций, значимых для успешного обучения в магистратуре по программе «Комплексный анализ и приложения».

2. Основные требования к уровню подготовки / знаниям, умениям и навыкам / компетентности поступающего

Абитуриент, поступающий в магистратуру, должен владеть компетенциями, значимыми для успешного обучения по выбранной программе:

а) общекультурными (ОК):

- владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения;
- способность применения в научно-исследовательской и профессиональной деятельности базовые знания в области фундаментальной и прикладной математики и естественных наук;
- значительные навыки самостоятельной работы с компьютером, программирования, использования методов обработки информации и численных методов решения базовых задач;
- умение логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь;

б) профессиональными (ПК):

- осознание социальной значимости своей будущей профессии, обладание мотивацией к выполнению профессиональной деятельности;
- владение основами фундаментальных математических теорий (алгебры, геометрии, математического анализа), понимание их взаимосвязи и специфики каждой из них;
- понимание того, что фундаментальное знание является основой компьютерных наук;
- способность передачи результата проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженной в терминах предметной области изучавшегося явления;

- умение извлечения полезной научно-технической информации из электронных библиотек, реферативных журналов, сети Интернет;
- возможностью преподавания физико-математических дисциплин и информатики в общеобразовательных учреждениях и образовательных учреждениях среднего профессионального образования;
- владение основами речевой профессиональной культуры;

3. Форма вступительных испытаний и его процедура

Вступительные испытания проводятся в форме письменного экзамена по математике по вариантам, с вопросами и заданиями, предполагающими подготовку развернутых ответов, позволяющих определить качество знаний и умений по математическому анализу, алгебре и геометрии; степень сформированности компетенций, значимых для освоения выбранной магистерской программы.

Продолжительность экзамена – 120 минут. По результатам вступительных испытаний выставляется оценка по 100-балльной шкале. Объявление итогов экзамена происходит в соответствии с графиком оглашения результатов вступительных испытаний в магистратуру.

При проведении вступительных испытаний применяются следующие контролирующие средства:

- вопросы, направленные на выявление теоретических знаний абитуриентов;
- задания практического характера, ориентированные на выявление умений и навыков решения стандартных математических задач в объеме программы бакалавриата и специалитета по направлениям «Математика и компьютерные науки», «Прикладная математика и информатика», «Педагогическое образование» и др.

4. Содержание программы

Математический анализ

Множества. Эквивалентность множеств. Счетные и несчетные множества. Несчетность множества действительных чисел.

Различные определения предела функции в точке. Предел последовательности. Основные теоремы о пределах. Непрерывность функции. Теорема Больцано-Коши. Свойства функций, непрерывных на отрезке (теоремы Вейерштрасса, теорема Кантора).

Производная. Дифференцируемые функции одной и нескольких переменных, связь дифференцируемости непрерывностью и существованием производной (частных производных). Техника дифференцирования. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля,

Лагранжа, Коши). Правило Лопиталья.

Формула Тейлора. Исследование функций с помощью первой и второй производных.

Первообразная и неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования. Конструкция интеграла Римана. Условия интегрируемости, основные классы интегрируемых функций. Формула Ньютона-Лейбница. Спрямоугольные кривые. Квадрируемые фигуры.

Числовые ряды. Основные признаки сходимости положительных рядов. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Условия разложимости функции в ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора. Элементарные функции комплексной переменной.

Дифференциальные уравнения. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Алгебра

Разложение целых чисел в произведение простых (основная теорема арифметики). Деление целых чисел с остатком. Сравнение целых чисел по модулю. Свойства сравнений. Наибольший общий делитель двух целых чисел. Алгоритм Евклида. Свойство последнего члена последовательности Евклида.

Определение системы вещественных чисел. Определение комплексных чисел. Действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах. Числовые поля. Минимальность поля рациональных чисел. Неприводимые полиномы над полем. Разложение полинома над полем на неприводимые множители. Неприводимые полиномы над полями комплексных, вещественных, рациональных чисел. Количество корней полинома.

Решение систем линейных уравнений методом исключения неизвестных (метод Гаусса). Определение линейного пространства. Примеры. Нулевой и противоположный элементы, их свойства. Линейная зависимость и линейная независимость элементов линейного пространства. Базис множества элементов линейного пространства. Ранг совокупности элементов. Ранг матрицы. Критерий разрешимости системы линейных уравнений.

Определение группы, кольца, поля, свойства. Примеры.

Геометрия

Векторы. Сложение, умножение вектора на число. Теоремы о разложении векторов. Скалярное произведение векторов и его свойства.

Общее уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между прямыми. Уравнения плоскости и прямой в

пространстве. Аксиоматический метод в геометрии. Аксиомы евклидовой планиметрии. Непротиворечивость евклидовой геометрии. Система аксиом планиметрии Лобачевского. Ее непротиворечивость. Независимость аксиомы параллельности Евклида.

Движения плоскости (определение и общие свойства). Площадь многоугольной фигуры. Теорема единственности.

Топологическое пространство. Непрерывные отображения. Гомеоморфизмы. Примеры.

Определение элементарной кривой. Способы ее задания. Касательная. Длина кривой (определение и вычисление). Кривизна кривой. Соприкасающаяся плоскость кривой. Кручение кривой.

5. Критерии оценки

Ответы абитуриентов оцениваются по 100-балльной шкале. В экзаменационную работу включено 10 вопросов и заданий. Каждое задание (вопрос) оценивается из 10 баллов.

Критерии оценивания каждого задания (вопроса):

- правильный ответ с полным объяснением – 10 баллов;
- ответ с незначительной неточностью или недостаточно полный – 7-9 баллов;
- ответ неполный или содержащий принципиальную ошибку – 4-6 баллов;
- неверный ответ, содержащий здравую идею или демонстрирующий понимание сути задания – 1-3 баллов;
- отсутствие ответа или принципиально неверный ответ – 0 баллов.

6. Примерный перечень вопросов и типов заданий для подготовки к вступительному испытанию

Примерные теоретические вопросы.

1. Счетные и несчетные множества. Несчетность множества действительных чисел.
2. Различные определения предела функции в точке. Предел последовательности.
3. Основные теоремы о пределах.
4. Непрерывность функции. Теорема Больцано-Коши.
5. Свойства функций, непрерывных на отрезке (теоремы Вейерштрасса, теорема Кантора).
6. Дифференцируемые функции одной и нескольких переменных, связь дифференцируемости с непрерывностью и существованием производной

- (частных производных).
7. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши).
 8. Правило Лопиталя.
 9. Формула Тейлора.
 10. Исследование функций с помощью первой и второй производных.
 11. Первообразная и неопределенный интеграл. Конструкция интеграла Римана.
 12. Условия интегрируемости, основные классы интегрируемых функций. Формула Ньютона-Лейбница.
 13. Спряжляемые кривые. Квадрируемые фигуры.
 14. Числовые ряды. Основные признаки сходимости положительных рядов. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.
 15. Степенные ряды. Теорема Абеля.
 16. Ряд Тейлора. Условия разложимости функции в ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора.
 17. Элементарные функции комплексной переменной.
 18. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Разложение целых чисел в произведение простых (основная теорема арифметики).
 19. Деление целых чисел с остатком. Сравнение целых чисел по модулю. Свойства сравнений.
 20. Наибольший общий делитель двух целых чисел. Алгоритм Евклида. Свойство последнего члена последовательности Евклида.
 21. Определение системы вещественных чисел.
 22. Определение комплексных чисел. Действия с комплексными числами в нормальной и тригонометрической формах.
 23. Числовые поля. Минимальность поля рациональных чисел. Неприводимые полиномы над полем. Разложение полинома над полем на неприводимые множители.
 24. Неприводимые полиномы над полями комплексных, вещественных, рациональных чисел. Количество корней полинома.
 25. Решение систем линейных уравнений методом исключения неизвестных (метод Гаусса).
 26. Определение линейного пространства. Примеры. Нулевой и противоположный элементы, их свойства.
 27. Линейная зависимость и линейная независимость элементов линейного пространства.
 28. Базис множества элементов линейного пространства. Ранг совокупности элементов.
 29. Ранг матрицы. Критерий разрешимости системы линейных уравнений.
 30. Определение группы, кольца, поля, свойства. Примеры.
 31. Векторы. Сложение, умножение вектора на число. Теоремы о разложении

- векторов.
32. Скалярное произведение векторов. Определение и свойства.
 33. Общее уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между прямыми.
 34. Уравнения плоскости и прямой в пространстве.
 35. Аксиомы евклидовой планиметрии. Непротиворечивость евклидовой геометрии.
 36. Система аксиом планиметрии Лобачевского. Ее непротиворечивость. Независимость аксиомы параллельности Евклида.
 37. Движения плоскости (определение и общие свойства).
 38. Площадь многоугольной фигуры. Теорема единственности.
 39. Топологическое пространство. Непрерывные отображения. Гомеоморфизмы. Примеры.
 40. Определение элементарной кривой. Способы ее задания. Касательная.
 41. Длина кривой (определение и вычисление).
 42. Кривизна кривой. Соприкасающаяся плоскость кривой.
 43. Кручение кривой.

Примерные типы заданий практического характера.

1. Найти предел заданной функции (последовательности).
2. Доказать существование предела заданной функции (последовательности).
3. Найти производную заданной функции.
4. Найти асимптоты данной функции и построить схематично ее график.
5. Найти заданный интеграл.
6. Вычислить площадь заданной фигуры.
7. Вычислить объем заданного тела.
8. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.
9. Доказать равномерную сходимость заданного ряда на указанном множестве.
10. Разложить заданную функцию в ряд Тейлора.
11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле.
12. Решить данное дифференциальное уравнение.
13. Решить задачу Коши для заданного дифференциального уравнения.
14. Привести пример неприводимого (приводимого) многочлена над заданным полем.
15. Вычислить определитель заданной матрицы.
16. Решить данную систему линейных уравнений.
17. Решить в целых числах данное уравнение (систему уравнений).
18. Привести примеры алгебраических (трансцендентных) чисел над указанным полем.
19. Решить задачу на делимость.

20. Доказать, что группа, обладающая неким заданным свойством – абелева.
21. Установить линейную зависимость (независимость) заданных элементов линейного пространства.
22. Написать аналитическое задание указанного движения.
23. Написать уравнение касательной к данной в пространстве прямой, параллельной указанной плоскости.
24. Решить задачу по элементарной геометрии.
25. Решить геометрическую задачу векторным способом.
26. Найти скалярное произведение заданных векторов.
27. Найти угол между заданными прямыми.
28. Найти кривизну заданной кривой.
29. Расположить заданные утверждения в виде цепочки, где каждое последующее утверждение следует из предыдущего.

7. Рекомендуемая литература (основная и дополнительная).

Основная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3. Издания разных лет.
2. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. Ч.1 и Ч.2. М. «Просвещение». Издания разных лет.
3. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А. Геометрия: учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. Т. 1. – СПб., 1997.
4. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А. Геометрия: учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. Т. 2. – СПб., 1997.

Дополнительная литература:

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.І. М.: Наука, 1982; Ч.ІІ. М. : Наука, 1980.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М. Издания разных лет.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М. Издания разных лет.
8. Ефимов Н.В. Высшая геометрия: Учебное пособие для вузов. Издания разных лет.

9. Образец варианта экзаменационных заданий

1. Сформулируйте определение предела функции в конечной точке: а) на языке неравенств (по Коши), б) на языке последовательностей (по Гейне). Равносильны ли эти определения?
2. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.
3. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной в декартовых координатах линиями $y = x^2$ и $y = x^3$.
4. Найдите действительную и мнимую части функции $w = \sin z$, где $z = x + iy$ - комплексная переменная.
5. Решите дифференциальное уравнение $y'' + 4y = 0$.
6. Напишите пример многочлена приводимого над полем C , но неприводимого над полями R, Q .
7. Какие вы знаете способы нахождения наибольшего общего делителя целых чисел. Какие теоретические положения (теоремы) лежат в основе этих способов?
8. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -28 \end{pmatrix}$. Может ли система линейных уравнений, имеющая матрицей коэффициентов при неизвестных матрицу A , иметь единственное решение? Ответ поясните.
9. Сформулируйте пятый постулат Евклида и два утверждения, равносильные ему.
10. Дан параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$, построенный на векторах $\overline{AB} = (4, 3, 0)$, $\overline{AD} = (2, 1, 2)$, $\overline{AA'} = (-3, -2, 5)$. Вычислите длину высоты, проведенной из вершины C' на грань $ABCD$ (система координат декартова).